

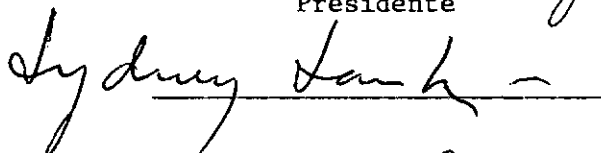
ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS SANDWICH COMPRIMIDAS

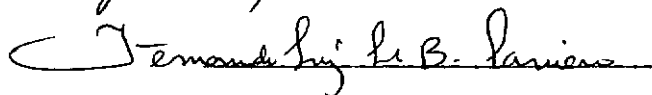
SERGIO FERNANDES VILLAÇA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente





RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

JULHO 1970

Para Maria Lucia

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Paulo Alcantara Gomes, pela valiosa e dedicada orientação.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas e ao Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico, pelo apoio financeiro prestado.

A Vera, pela confecção gráfica deste trabalho.

S U M Á R I O

O problema abordado neste trabalho é o da determinação e análise das equações que regem o fenômeno de vibrações transversais de vigas sandwich submetidas a cargas axiais de compressão, bem como a análise das cargas críticas de instabilidade pelo processo dinâmico.

Foram estudados os casos correspondentes a diversas condições de contorno, e obtidas as respectivas equações de frequência.

São apresentados, também, gráficos e tabelas, através do quais se pode verificar o comportamento das frequências naturais de vibração e da carga de instabilidade, em função da variação da rigidez ao cisalhamento das vigas sandwich.

S U M M A R Y

The problem undertaken in this work is to determine and analyze the equations of lateral vibrations of sandwich beams with an axial compressive load, as well as the analysis of the instability loads by a dynamic method.

Some cases, corresponding to several boundary conditions, were studied and the respective frequency equations were established.

The behaviour of the natural frequencies with the variation of the compressive load is plotted for several values of the shear stiffness of the sandwich beams. Numerical tables give the results for each case of boundary conditions.

Í N D I C E

SUMÁRIO	11
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
A) DEFINIÇÕES E HIPÓTESES BÁSICAS	1
B) EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	2
CAPÍTULO II - INSTITUIÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE VIBRAÇÕES	
TRANSVERSAIS DE VIGAS SANDWICH COMPRIMIDAS	10
A) ENERGIA CINÉTICA	10
B) ENERGIA POTENCIAL	11
C) PRIMEIRA VARIAÇÃO DE UMA INTEGRAL DUPLA	13
D) DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, A PARTIR DO	
PRINCÍPIO DE HAMILTON	19
CAPÍTULO III - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÃO	
A DIVERSOS CASOS DE CONDIÇÕES DE CONTÔRNO	23
A) SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL	23
B) CONDIÇÕES DE CONTÔRNO	28
C) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FREQUÊNCIA PARA	
DIVERSAS CONDIÇÕES DE CONTÔRNO	31
CAPÍTULO IV - RESULTADOS E CONCLUSÕES	40
TABELAS	44
GRÁFICOS	61
SIMBOLOGIA	65
BIBLIOGRAFIA	68

C A P Í T U L O I

I N T R O D U Ç Ã O

A) DEFINIÇÕES E HIPÓTESES BÁSICAS

Entender-se-á, neste trabalho, por vigas sandwich os elementos estruturais lineares constituídos por um núcleo leve e duas lâminas delgadas (faces), solidarizadas a duas superfícies laterais opostas do núcleo (fig.1).

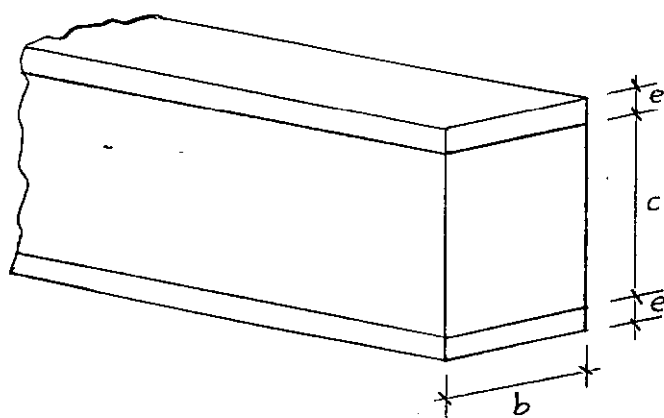


Fig. 1

Serão consideradas, além das hipóteses básicas da Resistência dos Materiais, as seguintes hipóteses fundamentais:

- a) Para as faces, será admitido que as tensões normais se distribuem linearmente ao longo da seção transversal, e que as tensões cisalhantes não produzem deformações (a rigidez ao cisalhamento das faces é infinita).

- b) Com relação ao núcleo, será considerado que não ocorrem tensões normais, e que existem deformações por efeito do cisalhamento.

B) EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Por um procedimento geral, serão deduzidas equações fundamentais da flexão para uma viga com faces de mesma espessura (Plantema¹).

Para uma solicitação constituída por um momento fletor M e um esforço cortante Q , agindo na seção transversal, o elemento de viga sofrerá uma deformação que pode ser

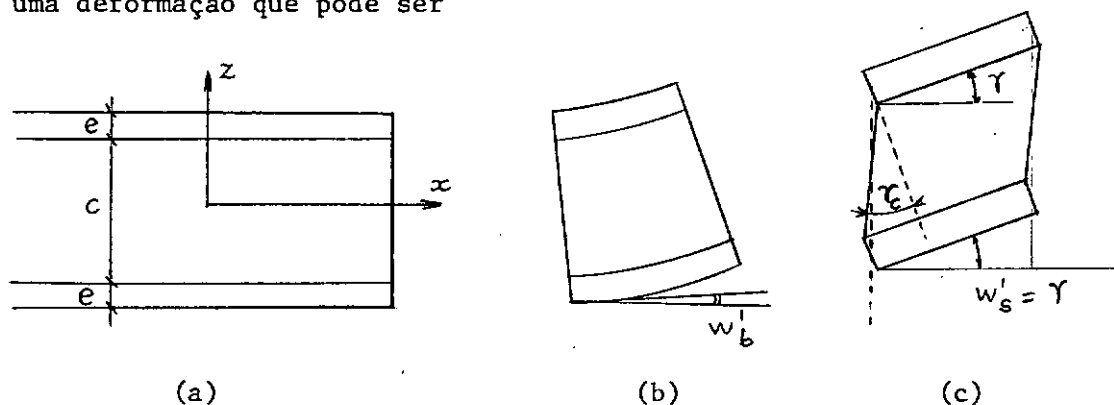


Fig. 2

decomposta em duas outras: a primeira, que ocorreria se o núcleo tivesse in finita rigidez ao cisalhamento (fig. 2-b), e a segunda, que é devida à distorção do núcleo (fig. 2-c). Da mesma forma, a deflexão w da viga pode ser decomposta nas deflexões parciais w_b e w_s , devidas respectivamente às duas

deformações citadas, tendo-se então

$$w = w_b + w_s \quad (I.1)$$

Para a primeira, são válidas as equações usuais da Resistência dos Materiais, e a tensão normal numa fibra à distância z da origem, sendo esta situada no eixo da viga, é dada por

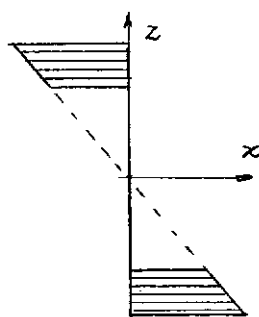
$$\sigma_{z,1} = - E z w_b'' \quad (I.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material das faces, e w_b'' representa a derivada segunda de w_b em relação a x .

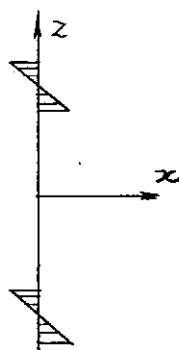
Para a segunda deflexão parcial (w_s), se o esforço cortante for função de x , haverá uma curvatura w_s'' que não contribui para a curvatura do elemento como um todo, pois a tensão normal é

$$\sigma_{z,2} = - E z_f w_s'' \quad (I.3)$$

onde z_f é a distância ao plano médio da face. Desta forma, as faces estão sujeitas, para este caso, apenas a momento fletor, não havendo força normal resultante nas mesmas.



$\sigma_{z,1}$



$\sigma_{z,2}$

Fig. 3

Os diagramas de tensões para as deformações parciais estão representados na fig. 3.

A tensão normal global nas faces é, portanto

$$\sigma_z = \sigma_{z,1} + \sigma_{z,2} = -E z w_b'' - E z_f w_s'' \quad (I.4)$$

Integrando através da espessura das faces, ter-se-á o esforço normal resultante em cada face. Na face inferior, por exemplo, sendo b a espessura da viga,

$$N = - \int_{c/2}^{c/2+e} \sigma_z b dz = - \int_{c/2}^{c/2+e} -E b z w_b'' dz$$

$$N = \frac{1}{2} E b e (c + e) w_b'' \quad (I.5)$$

e, na face superior, o esforço normal resultante será $-N$.

A convenção de sinais adotada é apresentada na fig. 4.

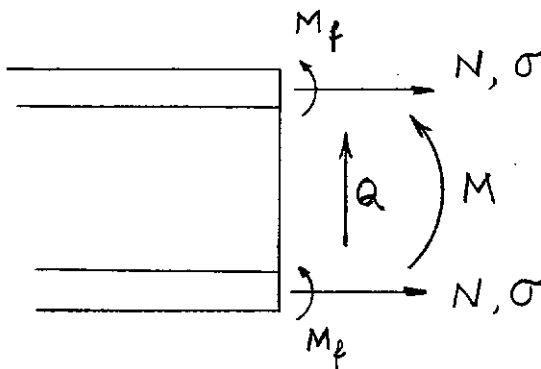


Fig. 4

A parcela M_o do momento fletor, devida às forças resultantes de tração e compressão nas faces será:

$$M_o = N (c + e) = \frac{1}{2} E b e (c + e)^2 w_b'' \quad (I.6)$$

Considerando as faces em separado, o momento fletor que nelas atua é

$$M_f = E \frac{be^3}{12} w'' = E \frac{be^3}{12} (w_b'' + w_s'') \quad (I.7)$$

O momento total que age na seção transversal da viga é

$$M = M_o + 2 M_f \quad (I.8)$$

A rigidez à flexão das faces é dada por

$$B_f = E \frac{be^3}{12} \quad (I.9)$$

e a rigidez à flexão da viga, quando as faces são consideradas como membranas, é

$$B = \frac{1}{2} E b e (c + e)^2 \quad (I.10)$$

O momento fletor pode, então, ser dado pela expressão

$$M = B w_b'' + 2 B_f w'' \quad (I.11)$$

A distorção γ do elemento de viga

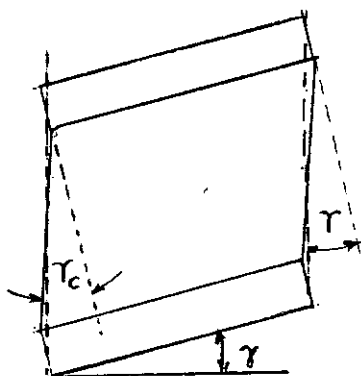


Fig. 5

sandwich está relacionada à distorção do núcleo γ_c (fig. 5) pela equação

$c \cdot \gamma_c = (c + e) \gamma$, e, portanto

$$\gamma = \frac{c}{c + e} \gamma_c \quad (\text{I.12})$$

A distorção do núcleo γ_c é dada por

$$\gamma_c = \frac{\tau_c}{G} \quad (\text{I.13})$$

onde τ_c é a tensão cisalhante do núcleo (a qual é independente de z , uma vez que, por hipótese, não há tensões normais no núcleo), e G é o módulo de cisalhamento do material do núcleo.

Para a obtenção do diagrama de tensões cisalhantes ao longo da seção transversal da viga, tem-se que

$$\tau_z = \int_z^{c/2+e} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz \quad (I.14)$$

Em qualquer ponto do núcleo, a tensão de cisalhamento é

$$\tau_c = \int_{c/2}^{c/2+e} (-E z w_b''' - E z_f w_s''') dz \quad (I.15)$$

Considerando a face superior,

$$z_f = z - \frac{c+e}{2} \quad (I.16)$$

e, portanto, a equação (I.15) se torna

$$\tau_c = -E w_b''' \left[\frac{z^2}{2} \right]_{c/2}^{c/2+e} - E w_s''' \left[\frac{z^2}{2} - \frac{c+e}{2} z \right]_{c/2}^{c/2+e}$$

$$\tau_c = -\frac{1}{2} E w_b''' e (c+e) \quad (I.17)$$

O diagrama de tensões cisalhantes é mostrado na figura 6, e, levando em conta que a espessura das faces é pequena em relação à do núcleo, pode-se escrever que, aproximadamente,

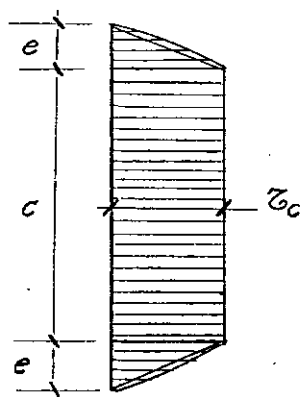


Fig. 6

$$Q = \bar{\tau}_c b (c + e) \quad (\text{I.18})$$

ou, substituindo $\bar{\tau}_c$ por seu valor,

$$Q = G b \gamma_c (c + e) = G \gamma b \frac{(c + e)^2}{c} \quad (\text{I.19})$$

Tal aproximação acarreta um erro muito pequeno, que diminui quando a relação c/e aumenta.

Definindo a rigidez ao cisalhamento S como a relação entre o esforço cortante e a distorção conseqüente, ter-se-á

$$S = \frac{Q}{\gamma} = G b \frac{(c + e)^2}{c} = 2 \frac{GB}{E c e} \quad (\text{I.20})$$

Das equações (I.17), (I.18) e (I.19) se deduz, da forma seguinte, a relação que liga a deflexão w à distorção γ :

$$G \gamma_b \frac{(c+e)^2}{c} = - \frac{1}{2} E b e (c+e)^2 w_b''' \quad (\text{I.21})$$

e, portanto,

$$w_b''' = - 2 \frac{G \gamma}{E c e} = - \frac{S}{B} \gamma \quad (\text{I.22})$$

Mas $w''' = w_b''' + w_s'''$, e assim

$$w''' = \gamma'' - \frac{S}{b} \gamma \quad (\text{I.23})$$

C A P Í T U L O I I

INSTITUIÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE VIGAS SANDWICH COMPRIMIDAS

A) ENERGIA CINÉTICA

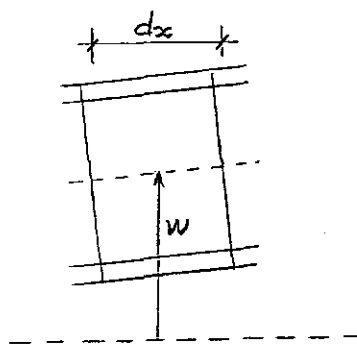


Fig. 7

Considere-se o elemento de viga representado na figura 7. A energia cinética de translação do elemento de comprimento dx será dada por

$$dT = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{II.1})$$

onde ρ é a massa da viga por unidade de comprimento e $\frac{\partial w}{\partial t}$ a velocidade de translação do elemento na direção w (despreza-se a energia cinética de translação na direção x).

A energia cinética de translação da viga de comprimento ℓ será da da por:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{II.2})$$

Será desprezada a influência da inércia de rotação das seções transversais, que só conduzem a resultados significativos, quando as frequências de vibração são altas (Rayleigh²).

B) ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial de deformação pode ser decomposta em 4 parcelas: a 1.^a, obtida considerando a flexão do elemento de viga como um todo; a 2.^a, que leva em conta a rigidez à flexão das faces, consideradas isoladamente; a 3.^a parcela será aquela devida à deformabilidade da viga ao cisalhamento, que, como visto, tem considerável influência na análise de estruturas sandwich; e a 4.^a parcela levará em conta a deformação por compressão.

Assim, a primeira parcela será da forma:

$$dU_1 = \frac{1}{2} B \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} B \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right]^2 dx, \quad (\text{II.3})$$

enquanto que a segunda será:

$$dU_2 = 2 \times \frac{1}{2} B_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = B_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (\text{II.4})$$

e a terceira parcela

$$dU_3 = \frac{1}{2} S \gamma^2 dx \quad (\text{II.5})$$

A quarta parcela corresponde à energia de deformação por compressão.

$$dU_4 = \frac{1}{2} F \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (\text{II.6})$$

onde F é a carga axial de compressão e u é a componente do deslocamento segundo o eixo dos x . Esta parcela não será levada em conta na energia potencial de deformação porque não varia com o tempo.

A energia potencial de deformação do elemento será, portanto,

$$dU_i = \left\{ \frac{1}{2} B \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right]^2 + B_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} S \gamma^2 \right\} dx \quad (\text{II.7})$$

A energia total de deformação da viga pode ser obtida mediante integração ao longo do comprimento. Então,

$$U_i = \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \frac{1}{2} B \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right]^2 + B_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} S \gamma^2 \right\} dx \quad (\text{II.8})$$

Além disso, deve ser considerado o trabalho efetuado pelas forças de compressão externas, que é a variação da energia potencial dessas forças:

$$U_e = - F \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{II.9})$$

A energia potencial total do sistema será dada finalmente por:

$$U = \int_{-l/2}^{l/2} \left\{ \frac{1}{2} B \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right]^2 + B_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} S \gamma^2 - \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (\text{II.10})$$

C) PRIMEIRA VARIAÇÃO DE UMA INTEGRAL DUPLA

Com a finalidade de uniformizar as notações e permitir a melhor compreensão das equações que serão deduzidas nos próximos itens, será apre-

sentada a seguir a dedução da expressão da primeira variação de uma integral dupla, considerando que no funcional dado por

$$A = \iint_R H(x, t, w, w', \dot{w}, w'', \gamma, \gamma') dx dt \quad (\text{II.11})$$

w e γ são funções de x e t .

Seja, então, uma região R definida no plano (x, t) , fechada e tal que nela pode ser definido um conjunto W de funções $w(x, t)$ e um outro conjunto Γ de funções $\gamma(x, t)$, sendo as derivadas parciais de w e γ contínuas até a quarta ordem em R .

Além disso, considere-se que qualquer função de W satisfaz a condições forçadas de contorno do tipo

$$a_1 w + b_1 \frac{\partial w}{\partial n} = c_1 \quad (\text{II.12})$$

onde a_1 , b_1 e c_1 são funções definidas no contorno de R , e $\frac{\partial w}{\partial n}$ é a derivada normal ao contorno.

Considere-se também que qualquer função de Γ satisfaz à condição similar

$$a_2 \gamma + b_2 \frac{\partial \gamma}{\partial n} = c_2 \quad (\text{II.13})$$

onde a_2 , b_2 e c_2 são funções definidas no contorno, e $\frac{\partial \gamma}{\partial n}$ é derivada nor-

mal ao contorno.

Admitindo que as funções w e γ sofrem variações dadas por $\epsilon\eta(x,t)$ e $\epsilon\psi(x,t)$, onde ϵ é um infinitésimo arbitrário, e η e ψ pertencem respectivamente às classes W e Γ , então, a integral A tem um incremento ΔA dado por

$$\begin{aligned} \Delta A = & \int_R \int \left[H(x, t, w + \epsilon\eta, w' + \epsilon\eta', \right. \\ & \dot{w} + \epsilon\dot{\eta}, w'' + \epsilon\eta'', \gamma + \epsilon\psi, \gamma' + \epsilon\psi') - \\ & \left. - H(x, t, w, w', \dot{w}, w'', \gamma, \gamma') \right] dx dt \end{aligned} \quad (II.14)$$

Aplicando o teorema de Taylor e expandindo a função H em série de potências de ϵ , obter-se-á, desprezando os termos de ordem superior (Langhaar³):

$$\begin{aligned} \delta A = \epsilon \int_R \int & \left[\eta \frac{\partial H}{\partial w} + \eta' \frac{\partial H}{\partial w'} + \dot{\eta} \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} + \right. \\ & \left. + \eta'' \frac{\partial H}{\partial w''} + \psi \frac{\partial H}{\partial \gamma} + \psi' \frac{\partial H}{\partial \gamma'} \right] dx dt \end{aligned} \quad (II.15)$$

Aplicando o teorema de Green a cada um dos elementos do integrando, ter-se-á:

$$\begin{aligned}
 \iint_R \eta' \frac{\partial H}{\partial w'} dx dt &= - \iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w'} \right) dx dt + \\
 &+ \oint_C \eta \frac{\partial H}{\partial w'} dt
 \end{aligned} \tag{II.16}$$

(Nesta equação e nas subsequentes C é a curva que define o contorno de R).

$$\begin{aligned}
 \iint_R \dot{\eta} \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} dx dt &= - \iint_R \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right) dx dt - \\
 &- \oint_C \eta \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} dx
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_R \eta'' \frac{\partial H}{\partial w''} dx dt &= \iint_R \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) dx dt + \\
 &+ \oint_C \eta' \frac{\partial H}{\partial w''} dt - \oint_C \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) dt
 \end{aligned} \tag{II.18}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_R \psi' \frac{\partial H}{\partial Y'} dx dt = - \iint_R \psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial Y'} \right) dx dt - \\
 - \oint_C \psi \frac{\partial H}{\partial Y'} dt \quad (II.19)
 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados assim obtidos na equação (II.15), chegar-se-á a:

$$\begin{aligned}
 \delta A = \epsilon \iint_R \left\{ \eta \left[\frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) \right] + \psi \left[\frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial Y'} \right) \right] \right\} dx dt + \\
 + \epsilon \oint_C \eta \left[\frac{\partial H}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) \right] dt - \\
 - \epsilon \oint_C \eta \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} dx + \epsilon \oint_C \eta' \frac{\partial H}{\partial w''} dt -
 \end{aligned}$$

$$- \epsilon \oint_C \psi \frac{\partial H}{\partial \gamma'} dt \quad (\text{II.20})$$

A condição de extremo conduz a que a integral dupla na expressão acima deva se anular, quaisquer que sejam as funções $\eta(x,t)$ e $\psi(x,t)$. Em particular, isto é válido (Weinstock⁴) se $\psi(x,t)$ fôr idênticamente nulo e $\eta(x,t)$ fôr ainda arbitrário. Com isto, ter-se-á:

$$\frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) = 0 \quad (\text{II.21})$$

Além disto, considerando-se que $\psi(x,t)$ é idênticamente nulo, as integrais ao longo de C, cujos integrandos constituem as condições naturais de contorno, deverão também ser nulas, isto é:

$$\eta \left[\frac{\partial H}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial w''} \right) \right] = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\eta \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{w}} \right] = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\eta' \left[\frac{\partial H}{\partial w''} \right] = 0 \quad (\text{II.24})$$

Procedendo do mesmo modo com relação a γ , virá:

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma'} \right) = 0 \quad (\text{II.25})$$

com a condição natural de contorno

$$\psi \left[\frac{\partial H}{\partial \gamma'} \right] = 0 \quad (\text{II.26})$$

Se as condições forçadas de contorno não fixam os valores de η e ψ , então, nas condições naturais descritas acima, os termos entre colchetes deverão ser nulos. Por outro lado, se η e ψ forem obrigatoriamente nulos em C, então as condições naturais se transformam em identidades (o que ocorre com as condições forçadas usuais que se impõem nos problemas de vibrações de vigas).

D) DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, A PARTIR DO PRINCÍPIO DE HAMILTON

Uma vez obtidas as expressões das energias cinética e potencial da viga, pode ser determinada sem qualquer dificuldade a expressão da ação:

$$A = \int_{t_0}^t (T - U) dt \quad (\text{II.27})$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 A = & \int_{t_0}^t \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} B \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right]^2 - \right. \\
 & \left. - B_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{1}{2} S \gamma^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dt \quad (II.28)
 \end{aligned}$$

A partir da expressão da ação pode ser obtida, com aplicação do princípio de Hamilton, a equação do movimento vibratório de vigas sandwich comprimidas. Para isto, é suficiente que, ao se construir a expressão da primeira variação da ação (o princípio de Hamilton é traduzido matematicamente pelo fato de a primeira variação da ação ser nula), se tenha em mente que esta é dada por uma integral dupla. Consequentemente, é apenas necessário que sejam aplicadas as expressões deduzidas no capítulo anterior, as quais fornecem, em termos de uma equação a derivadas parciais e de condições naturais de contorno, a primeira variação de uma integral dupla.

Considerando-se, então, que H é dado por

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2 - \frac{1}{2} B (w'' - \gamma')^2 - B_f (w'')^2 - \\
 & - \frac{1}{2} S \gamma^2 + \frac{1}{2} F (w')^2 \quad (II.29)
 \end{aligned}$$

a substituição do seu valor nas equações (II.21) e (II.25) conduz a:

$$\begin{aligned}
 & - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - B \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3} \right] - \\
 & - 2 B_f \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0
 \end{aligned} \tag{II.30}$$

$$- S \gamma - B \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right] = 0 \tag{II.31}$$

que são as equações diferenciais que regem as vibrações de vigas sandwich submetidas a compressão axial.

Substituindo também o valor de H nas equações (II.22), (II.23), (II.24) e (II.26), ter-se-á:

$$\eta \left[F \frac{\partial w}{\partial x} + 2 B_f \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \tag{II.32}$$

$$\eta \left[\rho \frac{\partial w}{\partial t} \right] = 0 \tag{II.33}$$

$$\eta' \left[- B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - 2 B_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \tag{II.34}$$

que são as condições naturais de contorno associadas à equação diferencial (II.30), e

$$\psi \left[B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (\text{II.35})$$

que é a condição natural de contorno associada à equação diferencial (II.31).

Eliminando respectivamente γ e w nas equações (II.30) e (II.31), ter-se-á finalmente:

$$\begin{aligned} & - 2 B_f \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \left[\frac{S}{B} (B + 2 B_f) - F \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ & + F \frac{S}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{S}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{aligned} & - 2 B_f \frac{\partial^6 \gamma}{\partial x^6} + \left[\frac{S}{B} (B + 2 B_f) - F \right] \frac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + \\ & + F \frac{S}{B} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \rho \frac{S}{B} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^4 \gamma}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

que são as equações cuja integração será feita para a obtenção das equações de frequência.

C A P Í T U L O I I I

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÃO

A DIVERSOS CASOS DE CONDIÇÕES DE CONTÔRNO

A) SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Para a integração das equações diferenciais (II.36) e (II.37), instituídas no capítulo precedente, será desprezada a rigidez à flexão das faces B_f , sendo estas, portanto, consideradas como membranas. Tal simplificação é válida, uma vez que o valor de B_f é bastante pequeno em relação a B , e a sua consideração introduz apreciável dificuldade na análise.

Desta forma, as equações (II.36) e (II.37) reduzir-se-ão às seguintes:

$$\begin{aligned}
 (S - F) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F \frac{S}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{S}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\
 - \rho \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

$$(S - F) \frac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + F \frac{S}{B} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \rho \frac{S}{B} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} -$$

$$-\rho \frac{\partial^4 \gamma}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Considerando que as vibrações são periódicas, pode-se admitir, para w e γ , soluções que são funções senoidais do tempo:

$$w(x,t) = \text{sen } ft. \quad X(x) \quad (\text{III.3})$$

$$\gamma(x,t) = \text{sen } ft. \quad X_Y(x) \quad (\text{III.4})$$

onde X e X_Y são funções apenas de x .

Substituindo (III.3) e (III.4) em (III.1) e (III.2), estas duas últimas equações passam a ser da forma:

$$\left\{ \begin{aligned} (S - F) \frac{d^4 X}{dx^4} + \left[F \frac{S}{B} + \rho f^2 \right] \frac{d^2 X}{dx^2} - \\ - \rho f^2 \frac{S}{B} X \end{aligned} \right\} \text{sen } ft = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\left\{ \begin{aligned} (S - F) \frac{d^4 X_Y}{dx^4} + \left[F \frac{S}{B} + \rho f^2 \right] \frac{d^2 X_Y}{dx^2} - \\ - \rho f^2 \frac{S}{B} X_Y \end{aligned} \right\} \text{sen } ft = 0 \quad (\text{III.6})$$

o que implica na validade das equações ordinárias

$$(S - F) \frac{d^4 X}{dx^4} + \left[F \frac{S}{B} + \rho f^2 \right] \frac{d^2 X}{dx^2} -$$

$$- \rho f^2 \frac{S}{B} X = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$(S - F) \frac{d^4 X_Y}{dx^4} + \left[F \frac{S}{B} + \rho f^2 \right] \frac{d^2 X_Y}{dx^2} -$$

$$- \rho f^2 \frac{S}{B} X_Y = 0 \quad (\text{III.8})$$

cujas soluções serão da forma:

$$X = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x +$$

$$+ C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (\text{III.9})$$

$$X_Y = C_{10} \operatorname{sen} \alpha x + C_{20} \cos \alpha x +$$

$$+ C_{30} \sinh \beta x + C_{40} \cosh \beta x \quad (\text{III.10})$$

onde α e β são definidos pelas igualdades:

$$\alpha^2 = \frac{F \frac{S}{B} + \rho f^2}{2(S - F)} + \sqrt{\left[\frac{F \frac{S}{B} + \rho f^2}{2(S - F)} \right]^2 + \frac{\rho f^2 S}{B(S - F)}} \quad (\text{III.11})$$

$$\beta^2 = -\frac{F \frac{S}{B} + \rho f^2}{2(S - F)} + \sqrt{\left[\frac{F \frac{S}{B} + \rho f^2}{2(S - F)} \right]^2 + \frac{\rho f^2 S}{B(S - F)}} \quad (\text{III.12})$$

Substituindo na equação (I.20) - que exprime a relação existente entre w e γ - as soluções encontradas, virá:

$$\begin{aligned} & - C_1 \alpha^3 \cos \alpha x + C_2 \alpha^3 \sin \alpha x + C_3 \beta^3 \cosh \beta x + \\ & + C_4 \beta^3 \sinh \beta x = - C_{10} \alpha^2 \sin \alpha x - \\ & - C_{20} \alpha^2 \cos \alpha x + C_{30} \beta^2 \sinh \beta x + \\ & + C_{40} \beta^2 \cosh \beta x - \frac{S}{B} \left[C_{10} \sin \alpha x + \right. \\ & + C_{20} \cos \alpha x + C_{30} \sinh \beta x + \\ & \left. + C_{40} \cosh \beta x \right] \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

igualdade esta válida para quaisquer valores de x e t . Obter-se-á daí portanto um conjunto de equações algébricas que exprimem relações entre as constantes arbitrárias envolvidas nas equações (III.9) e (III.10):

$$C_{10} = - \frac{\alpha^3 C_2}{\alpha^2 + \frac{S}{B}}$$

$$C_{20} = \frac{\alpha^3 C_1}{\alpha^2 + \frac{S}{B}}$$

(III.14)

$$C_{30} = \frac{\beta^3 C_4}{\beta^2 - \frac{S}{B}}$$

$$C_{40} = \frac{\beta^3 C_3}{\beta^2 - \frac{S}{B}}$$

Este conjunto de equações permite eliminar quatro das oito constantes arbitrárias envolvidas no problema. Com isto, a solução $X(x)$ ficará perfeitamente determinada se a ela fôrem aplicadas as condições de contorno geométricas e físicas (Biezeno - Grammel⁵) que traduzem os vínculos do sistema.

Fazendo agora

$$\frac{\alpha \frac{S}{B}}{\alpha^2 + \frac{S}{B}} = J$$

$$\frac{\beta \frac{S}{B}}{\beta^2 - \frac{S}{B}} = K$$

(III.15)

e tendo em conta (III.3) e (III.4), obtém-se para $w(x,t)$ a expressão:

$$w(x,t) = \{C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \\ + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x\} \sin ft \quad (\text{III.16})$$

e para $\gamma(x,t)$ a expressão

$$\gamma(x,t) = \left[\alpha^2 J \frac{B}{S} C_1 \cos \alpha x - \right. \\ - \alpha^2 J \frac{B}{S} C_2 \sin \alpha x + \beta^2 K \frac{B}{S} C_3 \cosh \beta x + \\ \left. + \beta^2 K \frac{B}{S} C_4 \sinh \beta x \right] \sin ft \quad (\text{III.17})$$

B) CONDIÇÕES DE CONTÔRNO

Para os tipos usuais de vínculos, as expressões que representam as condições de contôrnio são similares àquelas da Resistência dos Materiais, com exceção de uma das condições para a extremidade engastada. Assim, se tem:

19) Extremidade engastada

A primeira condição, neste caso, é a deflexão nula, representada pela equação

$$w = 0 \quad (\text{III.18})$$

Uma vez fixado que, no engaste, a seção transversal da viga não sofre rotação, a inclinação w' do eixo da viga neste ponto será igual à distorção γ (fig. 8), e, portanto, ter-se-á que

$$w' - \gamma = 0 \quad (\text{III.19})$$

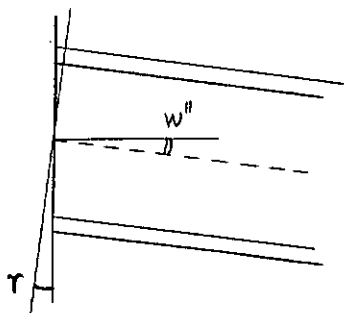


Fig. 8

Esta condição só é válida quando se despreza a rigidez à flexão B_f das faces, pois admite-se que a declividade das mesmas apresenta uma descontinuidade na extremidade engastada. Como isto é um efeito local, usualmente não é levado em conta na análise (Plantema¹).

29) Extremidade simplesmente apoiada

Tem-se, para esta situação, a deflexão nula

$$w = 0 \quad (\text{III.20})$$

e a condição de momento fletor nulo, a qual, levando em conta a expressão (I.11) e fazendo $B_f = 0$, pode ser escrita

$$w'' - \gamma' = 0 \quad (\text{III.21})$$

39) Extremidade livre

Neste caso, as condições serão: momento fletor nulo, que, como visto acima, é dada por:

$$w'' - \gamma' = 0 \quad (\text{III.22})$$

e esforço cortante igual à componente da força de compressão F na direção normal ao eixo da viga, ou seja,

$$Q = -M' = F w' \quad (\text{III.23})$$

Como se tem - pela equação (I.11) e fazendo $B_f = 0$ -

$$M = B (w'' - \gamma'), \quad (\text{III.24})$$

a 2.^a condição de contorno pode ser expressa por

$$w''' - \gamma'' + \frac{F}{B} w' = 0 \quad (\text{III.25})$$

C) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FREQUÊNCIA PARA DIVERSAS CONDIÇÕES DE CONTÔRNO

19) Viga engastada nas duas extremidades

A aplicação das condições de contôrnio

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ w' - \gamma = 0 \end{array} \right.$$

para $x = \pm \frac{\ell}{2}$ leva ao sistema de 4 equações homogêneas:

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha \ell}{2} + C_2 \cos \frac{\alpha \ell}{2} + C_3 \sinh \frac{\beta \ell}{2} + \\ + C_4 \cosh \frac{\beta \ell}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{aligned} JC_1 \cos \frac{\alpha \ell}{2} - JC_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha \ell}{2} - KC_3 \cosh \frac{\beta \ell}{2} - \\ - KC_4 \sinh \frac{\beta \ell}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{aligned} - C_1 \operatorname{sen} \frac{\alpha \ell}{2} + C_2 \cos \frac{\alpha \ell}{2} - C_3 \sinh \frac{\beta \ell}{2} + \\ + C_4 \cosh \frac{\beta \ell}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{aligned}
 & JC_1 \cos \frac{\alpha l}{2} + JC_2 \sin \frac{\alpha l}{2} - KC_3 \cosh \frac{\beta l}{2} + \\
 & + KC_4 \sinh \frac{\beta l}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{III.29}$$

Para que este sistema seja possível e determinado, é necessário e suficiente que seu determinante principal seja nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix}
 \sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & \sinh \frac{\beta l}{2} & \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 J \cos \frac{\alpha l}{2} & -J \sin \frac{\alpha l}{2} & -K \cosh \frac{\beta l}{2} & -K \sinh \frac{\beta l}{2} \\
 -\sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & -\sinh \frac{\beta l}{2} & \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 J \cos \frac{\alpha l}{2} & J \sin \frac{\alpha l}{2} & -K \cosh \frac{\beta l}{2} & K \sinh \frac{\beta l}{2}
 \end{vmatrix} = 0 \tag{III.30}$$

A condição de nulidade deste determinante traduz a equação de frequência do sistema e pode ser escrita na forma:

$$2 - 2 \cos \alpha l \cosh \beta l + \frac{J^2 - K^2}{JK} \sin \alpha l \sinh \beta l = 0 \tag{III.31}$$

A equação de frequência poderá ser descrita em termos de parâmetros adimensionais. Para tanto, basta fazer:

$$V = f \sqrt{\frac{\rho \ell^4}{B}} \quad (\text{III.32})$$

$$P = \frac{F \ell^2}{B} \quad (\text{III.33})$$

$$D = \frac{B}{S \ell^2} \quad (\text{III.34})$$

Os parâmetros definidos por (III.32), (III.33) e (III.34) são respectivamente proporcionais à frequência f , à carga axial de compressão F , e ao efeito sandwich, traduzido pelo fato de S (rigidez ao cisalhamento da seção transversal da viga) não ser infinito.

Então virá:

$$\alpha^2 \ell^2 = \frac{1}{2(1 - PD)} \left[P + V^2 D + \sqrt{(V^2 D - P)^2 + 4V^2} \right] \quad (\text{III.35})$$

$$\beta^2 \ell^2 = \frac{1}{2(1 - PD)} \left[-P - V^2 D + \sqrt{(V^2 D - P)^2 + 4V^2} \right] \quad (\text{III.36})$$

$$J = \frac{\alpha}{\alpha^2 \ell^2 D + 1} \quad (\text{III.37})$$

$$K = \frac{\beta}{\beta^2 \ell^2 D - 1} \quad (\text{III.38})$$

A equação de frequência para o caso engaste-engaste será, portanto:

$$2 - 2 \cos \alpha l \cosh \beta l +$$

$$+ \left[\frac{\alpha l (\beta^2 l^2 D - 1)}{\beta l (\alpha^2 l^2 D + 1)} - \frac{\beta l (\alpha^2 l^2 D + 1)}{\alpha l (\beta^2 l^2 D - 1)} \right] \sin \alpha l \sinh \beta l = 0 \quad (\text{III.39})$$

29) Viga simplesmente apoiada nas duas extremidades

A utilização das condições de contorno

$$\begin{cases} w = 0 \\ w'' - \gamma' = 0 \end{cases}$$

para $x = \pm \frac{l}{2}$ conduz ao sistema de 4 equações homogêneas:

$$C_1 \sin \frac{\alpha l}{2} + C_2 \cos \frac{\alpha l}{2} + C_3 \sinh \frac{\beta l}{2} + C_4 \cosh \frac{\beta l}{2} = 0 \quad (\text{III.40})$$

$$\alpha J C_1 \sin \frac{\alpha l}{2} + \alpha J C_2 \cos \frac{\alpha l}{2} + \beta K C_3 \sinh \frac{\beta l}{2} + \beta K C_4 \cosh \frac{\beta l}{2} = 0 \quad (\text{III.41})$$

$$- C_1 \sin \frac{\alpha l}{2} + C_2 \cos \frac{\alpha l}{2} - C_3 \sinh \frac{\beta l}{2} + C_4 \cosh \frac{\beta l}{2} = 0 \quad (\text{III.42})$$

$$-\alpha J C_1 \sin \frac{\alpha l}{2} + \alpha J C_2 \cos \frac{\alpha l}{2} - \beta K C_3 \sinh \frac{\beta l}{2} + \beta K C_4 \cosh \frac{\beta l}{2} = 0 \quad (\text{III.43})$$

Como no caso anterior, para que tal sistema seja possível e determinado, deve o seu determinante principal ser nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix}
 \sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & \sinh \frac{\beta l}{2} & \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 \alpha J \sin \frac{\alpha l}{2} & \alpha J \cos \frac{\alpha l}{2} & \beta K \sinh \frac{\beta l}{2} & \beta K \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 -\sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & -\sinh \frac{\beta l}{2} & \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 -\alpha J \sin \frac{\alpha l}{2} & \alpha J \cos \frac{\alpha l}{2} & -\beta K \sinh \frac{\beta l}{2} & \beta K \cosh \frac{\beta l}{2}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.44})$$

o que também pode ser traduzido, após as simplificações, pela equação de frequência

$$\sin \alpha l = 0 \quad (\text{III.45})$$

Neste caso, a frequência pode ser obtida facilmente, tendo-se em conta que, para que a equação acima seja satisfeita, é necessário que

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \quad (\text{III.46})$$

e, portanto,

$$f = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 B (S - F) - F S l^2}{n^2 \pi^2 \rho B + \rho S l^2}} \quad (\text{III.47})$$

Também a carga crítica pode, neste caso, ser determinada sem maiores dificuldades, desde que se faça na equação acima $f = 0$. Obter-se-á,

então:

$$F_{cr} = \frac{\frac{n^2 \Pi^2 B S}{n^2 \Pi^2 B + S \ell^2}}{1 + \frac{\frac{n^2 \Pi^2 B}{\ell^2}}{S \ell^2}} = \frac{\frac{n^2 \Pi^2 B}{\ell^2}}{1 + \frac{n^2 \Pi^2 B}{S \ell^2}} \quad (\text{III.48})$$

Em termos dos parâmetros adimensionais definidos no caso anterior, a equação (III.48) pode ser escrita:

$$P_o = \frac{n^2 \Pi^2}{1 + n^2 \Pi^2 D} \quad (\text{III.49})$$

39) Viga engastada em uma extremidade e simplesmente apoiada na outra.

As condições de contorno serão, neste caso, dadas por:

$$\text{para } x = \frac{\ell}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ w'' - \gamma' = 0 \end{array} \right. \quad \text{para } x = -\frac{\ell}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ w' - \gamma = 0 \end{array} \right.$$

A partir da aplicação destas condições de contorno, e levando-se em conta o raciocínio efetuado nos dois casos precedentes, a equação de frequência será obtida por meio do determinante

$$\begin{vmatrix}
 \sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & \sinh \frac{\beta l}{2} & \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 \alpha J \sin \frac{\alpha l}{2} & \alpha J \cos \frac{\alpha l}{2} & \beta K \sinh \frac{\beta l}{2} & \beta K \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 -\sin \frac{\alpha l}{2} & \cos \frac{\alpha l}{2} & -\sinh \frac{\beta l}{2} & \cosh \frac{\beta l}{2} \\
 J \cos \frac{\alpha l}{2} & J \sin \frac{\alpha l}{2} & -K \cosh \frac{\beta l}{2} & K \sinh \frac{\beta l}{2}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.50})$$

de onde provém a equação de frequência:

$$K \sin \alpha l \cosh \beta l + J \cos \alpha l \sinh \beta l = 0 \quad (\text{III.51})$$

que pode ser descrita, em termos dos parâmetros adimensionais definidos para o 1º caso, como

$$\frac{\beta l}{\alpha^2 l^2 D - 1} \sin \alpha l \cosh \beta l + \frac{\alpha l}{\alpha^2 l^2 D + 1} \cos \alpha l \sinh \beta l = 0 \quad (\text{III.52})$$

4º) Viga engastada em uma extremidade e livre na outra.

Para este caso, as condições de contorno são definidas pelas equações:

$$\begin{cases} w = 0 \\ w' - \gamma = 0 \end{cases}$$

para $x = -\frac{\ell}{2}$, e

$$\begin{cases} w'' - \gamma' = 0 \\ w''' - \gamma'' + \frac{F}{B} w' = 0 \end{cases}$$

para $x = \frac{\ell}{2}$, e a equação de frequência será obtida a partir da condição

$$\begin{vmatrix} J \cos \frac{\alpha \ell}{2} & J \sin \frac{\alpha \ell}{2} & -K \cosh \frac{\beta \ell}{2} & K \sinh \frac{\beta \ell}{2} \\ -\sin \frac{\alpha \ell}{2} & \cos \frac{\alpha \ell}{2} & -\sinh \frac{\beta \ell}{2} & \cosh \frac{\beta \ell}{2} \\ \alpha J \sin \frac{\alpha \ell}{2} & \alpha J \cos \frac{\alpha \ell}{2} & \beta K \sinh \frac{\beta \ell}{2} & \beta K \cosh \frac{\beta \ell}{2} \\ (\alpha^2 J - \frac{F\alpha}{B}) \cos \frac{\alpha \ell}{2} & -(\alpha^2 J - \frac{F\alpha}{B}) \sin \frac{\alpha \ell}{2} & (\beta^2 K - \frac{F\beta}{B}) \cosh \frac{\beta \ell}{2} & (\beta^2 K - \frac{F\beta}{B}) \sinh \frac{\beta \ell}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.53})$$

que se reduz a

$$\begin{aligned} & \alpha JK \left(\alpha^2 J - \frac{F}{B} \alpha \right) - \beta JK \left(\beta^2 K - \frac{F}{B} \beta \right) + \\ & + \left[\alpha JK \left(\beta^2 K - \frac{F}{B} \beta \right) + \beta JK \left(\alpha^2 J - \frac{F}{B} \alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha l \operatorname{senh} \beta l + \left[\alpha J^2 \left(\beta^2 K - \frac{F}{B} \beta \right) - \right. \\ \left. - \beta K^2 \left(\alpha^2 J - \frac{F}{B} \alpha \right) \right] \cos \alpha l \cosh \beta l = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

ou ainda, em termos de parâmetros adimensionais, a:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha l \cdot \beta l}{(\alpha^2 l^2 D + 1)(\beta^2 l^2 D - 1)} \left[\frac{\alpha^4 l^4}{\alpha^2 l^2 D + 1} - \frac{\beta^4 l^4}{\beta^2 l^2 D - 1} + \right. \\ \left. + P (\beta^2 l^2 - \alpha^2 l^2) \right] + \\ + \frac{\alpha^2 l^2 \cdot \beta^2 l^2}{(\alpha^2 l^2 D + 1)(\beta^2 l^2 D - 1)} \left[\frac{\beta^2 l^2}{\beta^2 l^2 D - 1} + \frac{\alpha^2 l^2}{\alpha^2 l^2 D + 1} - 2P \right] \cdot \\ \operatorname{sen} \alpha l \operatorname{senh} \beta l + \frac{\alpha^3 l^3 \cdot \beta^3 l^3}{(\alpha^2 l^2 D + 1)^2 (\beta^2 l^2 D - 1)^2} \cdot \\ \left[(\beta^2 l^2 D - 1) - (\alpha^2 l^2 D + 1) + \frac{P}{\alpha^2 l^2} (\alpha^2 l^2 D + 1)^2 - \right. \\ \left. - \frac{P}{\beta^2 l^2} (\beta^2 l^2 D - 1)^2 \right] \cos \alpha l \cosh \beta l = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

C A P Í T U L O I V

RESULTADOS E CONCLUSÕES

As tabelas e gráficos apresentados a seguir, fornecem valores numéricos para os parâmetros P , V e D , que, como visto, relacionam-se respectivamente à carga de compressão F , à frequência de vibração f e ao inverso da rigidez ao cisalhamento S .

Em situações particulares, definem-se ainda os parâmetros

$$P_o = \frac{F_{cr} \ell^2}{B} \quad (IV.1)$$

onde F_{cr} é a carga crítica de instabilidade, e

$$V_o = f_o \sqrt{\frac{\rho \ell^4}{B}} \quad (IV.2)$$

sendo f_o a frequência natural de vibração da viga sem carga axial.

As tabelas 1 a 4 apresentam, para os quatro casos estudados, os parâmetros P_o e V_o para diversos valores de D e para os quatro primeiros modos de vibração. Estão tabelados ainda os valores para os quais tende P_o , quando o número que representa o modo de vibração cresce indefinidamente. Tais valores correspondem à chamada "carga de instabilidade por cisalhamento", que é igual à rigidez ao cisalhamento, sendo, conseqüentemente, os va

lores tabelados os inversos dos respectivos parâmetros D . Deve-se notar, além disso, que estes valores de P_0 , pela sua própria natureza, independem das condições de contorno da viga.

Verifica-se pelas tabelas 1 a 4 que, à medida que diminui a rigidez ao cisalhamento, tanto a carga de instabilidade como a frequência de vibração decrescem. Este efeito se acentua para modos de vibração mais elevados.

Nas tabelas 5 a 8 encontra-se a variação da relação V/V_0 com a relação P/P_0 , para diversos valores de D e para os dois primeiros modos de vibração. No caso particular de viga bi-apoiada, V/V_0 está relacionado a P/P_0 independentemente do parâmetro D e do modo de vibração. Isto pode ser facilmente comprovado a partir da equação (III.47), a qual, em termos de parâmetros adimensionais, transforma-se em:

$$V = n\pi \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 - P (n^2 \pi^2 D + 1)}{n^2 \pi^2 D + 1}} \quad (\text{IV.3})$$

Fazendo na equação acima $P = 0$ (o que corresponde à viga sem carga axial), virá:

$$V_0 = n\pi \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 D + 1}} \quad (\text{IV.4})$$

A relação V/V_0 ficará, portanto:

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{n^2 \Pi^2 - P (n^2 \Pi^2 D + 1)}{n^2 \Pi^2}} \quad (\text{IV.5})$$

ou, elevando-se ao quadrado e simplificando,

$$\left(\frac{V}{V_0} \right)^2 = 1 - \frac{P (n^2 \Pi^2 D + 1)}{n^2 \Pi^2} \quad (\text{IV.6})$$

Levando agora em conta a equação (III.49), que fornece o valor de P_0 , e substituindo este valor na equação acima, chega-se a:

$$\left(\frac{V}{V_0} \right)^2 = 1 - \frac{P}{P_0} \quad (\text{IV.7})$$

Portanto, a tabela 5, que fornece os valores de $\frac{P}{P_0}$ relacionados a $\frac{V}{V_0}$ para o caso da viga bi-apoiada, é válida para qualquer valor de D e para qualquer modo de vibração.

Das tabelas 5 a 8 pode-se concluir que a frequência de vibração diminui quando a carga de compressão cresce, anulando-se quando se atinge a carga crítica de instabilidade.

Nos gráficos 1 a 4 estão traçadas as curvas que representam a variação de V com o parâmetro P , para diversos valores de D e para os quatro primeiros modos de vibração. Na interseção das curvas com o eixo vertical (V), têm-se os valores de V_0 (que correspondem às frequências naturais de

vibração sem carga axial); na interseção das curvas com o eixo horizontal (P), encontram-se os valores de P_0 , que correspondem às cargas de instabilidade elástica.

O presente trabalho pode ser estendido a outros casos de carregamento e a outros tipos de condições de contorno. Como passos seguintes, poderiam ser considerados que a carga de compressão se comporta como uma "follower force" (Ziegler⁶). Neste caso, o sistema torna-se não conservativo, e o processo dinâmico empregado para a análise da carga crítica sofre modificações; é preciso analisar o comportamento da primeira e da segunda frequências, e verificar quando as duas se tornam iguais.

Além disso, o presente trabalho poderá ser continuado, fazendo-se a determinação das regiões de instabilidade dinâmica e da influência do efeito sandwich nos limites de instabilidade. É suficiente, para isto, considerar que a carga de compressão é uma função do tempo.

CASC APOIO-APOIO (I)

TABELA 1-A - CARGAS CRÍTICAS DE FLAMBAGEM

I	0	MODOS					I
		1	2	3	4	∞	
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.000	9.870	39.478	88.826	157.913	∞	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.005	9.405	32.970	61.508	88.241	200.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.010	8.983	28.304	47.041	61.227	100.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.015	8.597	24.795	38.084	46.877	66.667	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.020	8.243	22.060	31.992	37.976	50.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.025	7.916	19.869	27.580	31.916	40.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.030	7.615	18.073	24.238	27.524	33.333	I
I	I	I	I	I	I	I	I

TABELA 1-B - FREQUENCIAS COM CARGA AXIAL NULA

I	0	MODOS					I
		1	2	3	4		
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.000	9.870	39.478	88.826	157.913	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.005	9.635	36.078	73.916	118.044	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.010	9.416	33.428	64.641	98.329	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.015	9.211	31.287	58.162	86.037	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.020	9.019	29.511	53.308	77.440	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.025	8.839	28.007	49.496	70.992	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.030	8.669	26.711	46.400	65.927	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I

CASO ENGASTE-ENGASTE (III)

TABELA 2-A - CARGAS CRITICAS DE FLAMBAGEM

I	D	MODOS					I
		1	2	3	4	∞	
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.000	I 39.478	I 80.763	I 157.913	I 238.718	I ∞	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.005	I 32.970	I 55.956	I 88.241	I 106.909	I 200.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.010	I 28.304	I 42.836	I 61.227	I 68.923	I 100.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.015	I 24.795	I 34.724	I 46.877	I 50.887	I 66.667	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.020	I 22.060	I 29.214	I 37.976	I 40.355	I 50.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.025	I 19.869	I 25.227	I 31.916	I 33.451	I 40.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.030	I 18.073	I 22.209	I 27.524	I 28.574	I 33.333	I
I	I	I	I	I	I	I	I

TABELA 2-B - FREQUENCIAS COM CARGA AXIAL NULA

I	D	MODOS					I
		1	2	3	4		
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.000	I 22.373	I 61.673	I 120.903	I 199.859	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.005	I 20.023	I 49.563	I 86.991	I 128.914	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.010	I 18.276	I 42.592	I 71.734	I 103.162	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.015	I 16.914	I 37.950	I 62.611	I 88.740	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.020	I 15.814	I 34.582	I 56.357	I 79.156	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.025	I 14.964	I 31.996	I 51.717	I 72.175	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.030	I 14.133	I 29.930	I 48.091	I 66.788	I	I
I	I	I	I	I	I	I	I

CASO ENGASTE-APOIO (III)

TABELA 3-A - CARGAS CRITICAS DE FLAMBAGEM

D	MODOS				
	1	2	3	4	∞
0.000	20.191	59.680	118.900	197.858	∞
0.005	18.175	45.614	74.106	134.523	200.000
0.010	16.525	36.915	53.829	65.989	100.000
0.015	15.151	31.005	42.268	49.499	66.667
0.020	13.989	26.727	34.796	39.605	50.000
0.025	12.993	23.488	29.571	33.009	40.000
0.030	12.130	20.951	25.712	28.298	33.333

TABELA 3-B - FREQUENCIAS COM CARGA AXIAL NULA

D	MODOS			
	1	2	3	4
0.000	15.418	49.965	104.248	178.270
0.005	14.462	42.908	80.649	123.651
0.010	13.662	38.217	68.332	100.821
0.015	12.980	34.825	60.471	87.425
0.020	12.391	32.228	54.881	78.318
0.025	11.875	30.157	50.634	71.597
0.030	11.420	28.453	47.259	66.368

CASO ENGASTE-LIVRE (IV)

TABELA 4-A - CARGAS CRITICAS DE FLAMBAGEM

I	I	MODOS							I			
I	D	I	1	I	2	I	3	I	4	I	∞	I
I	-----	I	-----	I	-----	I	-----	I	-----	I	-----	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.000	I	2.467	I	22.207	I	61.685	I	120.903	I	∞	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.005	I	2.437	I	19.987	I	47.144	I	75.352	I	200.000	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.010	I	2.408	I	18.171	I	38.151	I	54.731	I	100.000	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.015	I	2.379	I	16.658	I	32.040	I	42.972	I	66.667	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.020	I	2.351	I	15.377	I	27.616	I	35.372	I	50.000	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.025	I	2.324	I	14.279	I	24.265	I	30.056	I	40.000	I
I		I		I		I		I		I		I
I	0.030	I	2.297	I	13.328	I	21.640	I	26.129	I	33.333	I
I		I		I		I		I		I		I

TABELA 4-B - FREQUENCIAS COM CARGA AXIAL NULA

I	I	MODOS								I	
I	D	I	I								I
I	I	I	1	I	2	I	3	I	4	I	
I	I	I	I		I		I		I		
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.000	I	3.516	I	22.034	I	61.697	I	120.902	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.005	I	3.476	I	20.435	I	52.433	I	92.549	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.010	I	3.437	I	19.136	I	46.493	I	78.213	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.015	I	3.399	I	18.060	I	42.295	I	69.173	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.020	I	3.362	I	17.151	I	39.127	I	62.776	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.025	I	3.327	I	16.372	I	36.621	I	57.927	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	
I	0.030	I	3.292	I	15.696	I	34.572	I	54.078	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	

CASO APOIO SIMPLES-APOIO SIMPLES (1)

TABELA 5 - VALORES DE V/V_0 PARA QUALQUER D E QUALQUER MODD

P/P_0	V/V_0		P/P_0	V/V_0		P/P_0	V/V_0	
0.00	1.000		0.35	0.806		0.70	0.548	
0.01	0.995		0.36	0.800		0.71	0.539	
0.02	0.990		0.37	0.794		0.72	0.529	
0.03	0.985		0.38	0.787		0.73	0.520	
0.04	0.980		0.39	0.781		0.74	0.510	
0.05	0.975		0.40	0.775		0.75	0.500	
0.06	0.970		0.41	0.768		0.76	0.490	
0.07	0.964		0.42	0.762		0.77	0.480	
0.08	0.959		0.43	0.755		0.78	0.469	
0.09	0.954		0.44	0.748		0.79	0.458	
0.10	0.949		0.45	0.742		0.80	0.447	
0.11	0.943		0.46	0.735		0.81	0.436	
0.12	0.938		0.47	0.728		0.82	0.424	
0.13	0.933		0.48	0.721		0.83	0.412	
0.14	0.927		0.49	0.714		0.84	0.400	
0.15	0.922		0.50	0.707		0.85	0.387	
0.16	0.917		0.51	0.700		0.86	0.374	
0.17	0.911		0.52	0.693		0.87	0.361	
0.18	0.906		0.53	0.686		0.88	0.345	
0.19	0.900		0.54	0.678		0.89	0.332	
0.20	0.894		0.55	0.671		0.90	0.316	
0.21	0.889		0.56	0.663		0.91	0.300	
0.22	0.883		0.57	0.656		0.92	0.283	
0.23	0.877		0.58	0.648		0.93	0.265	
0.24	0.872		0.59	0.640		0.94	0.245	
0.25	0.866		0.60	0.632		0.95	0.224	
0.26	0.860		0.61	0.624		0.96	0.200	
0.27	0.854		0.62	0.616		0.97	0.173	
0.28	0.849		0.63	0.608		0.98	0.141	
0.29	0.843		0.64	0.600		0.99	0.100	
0.30	0.837		0.65	0.592		1.00	0.000	
0.31	0.831		0.66	0.583				
0.32	0.825		0.67	0.574				
0.33	0.819		0.68	0.566				
0.34	0.812		0.69	0.557				

CASO ENGASTE-ENGASTE (II)

TABELA 6-A - VALORES DE V/V_0 - MODO I

I	P/P ₀	D							I
		0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	
I	0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	I
I	0.02	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	I
I	0.04	0.980	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	I
I	0.06	0.970	0.971	0.972	0.972	0.972	0.972	0.972	I
I	0.08	0.960	0.961	0.962	0.962	0.962	0.962	0.962	I
I	0.10	0.950	0.951	0.952	0.952	0.952	0.952	0.952	I
I	0.12	0.940	0.941	0.942	0.942	0.942	0.942	0.942	I
I	0.14	0.929	0.931	0.932	0.932	0.932	0.932	0.932	I
I	0.16	0.919	0.921	0.922	0.922	0.922	0.922	0.922	I
I	0.18	0.908	0.910	0.911	0.912	0.912	0.912	0.912	I
I	0.20	0.897	0.900	0.901	0.901	0.902	0.902	0.901	I
I	0.22	0.886	0.889	0.890	0.891	0.891	0.891	0.891	I
I	0.24	0.875	0.878	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	I
I	0.26	0.864	0.867	0.869	0.869	0.870	0.870	0.869	I
I	0.28	0.852	0.856	0.857	0.858	0.859	0.859	0.858	I
I	0.30	0.841	0.844	0.846	0.847	0.847	0.847	0.847	I
I	0.32	0.829	0.833	0.835	0.836	0.836	0.836	0.836	I
I	0.34	0.817	0.821	0.823	0.824	0.825	0.825	0.824	I
I	0.36	0.805	0.809	0.811	0.812	0.813	0.813	0.813	I
I	0.38	0.792	0.797	0.799	0.800	0.801	0.801	0.801	I
I	0.40	0.780	0.784	0.787	0.788	0.789	0.789	0.789	I
I	0.42	0.767	0.772	0.774	0.776	0.776	0.777	0.776	I
I	0.44	0.754	0.759	0.762	0.763	0.764	0.764	0.764	I
I	0.46	0.740	0.746	0.749	0.750	0.751	0.751	0.751	I
I	0.48	0.727	0.732	0.735	0.737	0.738	0.738	0.738	I
I	0.50	0.713	0.719	0.722	0.724	0.724	0.725	0.725	I

(CONTINUA)

CASO ENGASTE-ENGASTE (II)

TABELA 6-B - VALORES DE V/V_0 - MODO 2

I	P/P ₀	D							I
		0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	
I	0.00	I 1.000	I 1.000	I 1.000	I 1.000	I 1.000	I 1.000	I 1.000	I
I	0.02	I 0.990	I 0.990	I 0.990	I 0.990	I 0.990	I 0.990	I 0.990	I
I	0.04	I 0.980	I 0.981	I 0.981	I 0.980	I 0.980	I 0.980	I 0.980	I
I	0.06	I 0.970	I 0.971	I 0.971	I 0.970	I 0.970	I 0.970	I 0.970	I
I	0.08	I 0.960	I 0.961	I 0.961	I 0.960	I 0.960	I 0.960	I 0.960	I
I	0.10	I 0.950	I 0.951	I 0.950	I 0.950	I 0.950	I 0.950	I 0.949	I
I	0.12	I 0.939	I 0.940	I 0.940	I 0.940	I 0.939	I 0.939	I 0.939	I
I	0.14	I 0.929	I 0.930	I 0.930	I 0.929	I 0.929	I 0.929	I 0.928	I
I	0.16	I 0.918	I 0.920	I 0.919	I 0.919	I 0.918	I 0.918	I 0.918	I
I	0.18	I 0.907	I 0.909	I 0.909	I 0.908	I 0.908	I 0.907	I 0.907	I
I	0.20	I 0.897	I 0.898	I 0.898	I 0.897	I 0.897	I 0.896	I 0.896	I
I	0.22	I 0.885	I 0.887	I 0.887	I 0.886	I 0.886	I 0.885	I 0.885	I
I	0.24	I 0.874	I 0.876	I 0.876	I 0.875	I 0.875	I 0.874	I 0.874	I
I	0.26	I 0.863	I 0.865	I 0.865	I 0.864	I 0.863	I 0.863	I 0.862	I
I	0.28	I 0.851	I 0.854	I 0.853	I 0.853	I 0.852	I 0.851	I 0.851	I
I	0.30	I 0.840	I 0.842	I 0.842	I 0.841	I 0.840	I 0.840	I 0.839	I
I	0.32	I 0.828	I 0.831	I 0.830	I 0.829	I 0.828	I 0.828	I 0.827	I
I	0.34	I 0.816	I 0.819	I 0.818	I 0.817	I 0.816	I 0.816	I 0.815	I
I	0.36	I 0.803	I 0.807	I 0.806	I 0.805	I 0.804	I 0.804	I 0.803	I
I	0.38	I 0.791	I 0.794	I 0.794	I 0.793	I 0.792	I 0.791	I 0.791	I
I	0.40	I 0.778	I 0.782	I 0.781	I 0.780	I 0.779	I 0.779	I 0.778	I
I	0.42	I 0.765	I 0.769	I 0.769	I 0.768	I 0.767	I 0.766	I 0.765	I
I	0.44	I 0.752	I 0.756	I 0.756	I 0.755	I 0.754	I 0.753	I 0.752	I
I	0.46	I 0.739	I 0.743	I 0.743	I 0.742	I 0.740	I 0.739	I 0.739	I
I	0.48	I 0.725	I 0.729	I 0.729	I 0.728	I 0.727	I 0.726	I 0.725	I
I	0.50	I 0.712	I 0.716	I 0.715	I 0.714	I 0.713	I 0.712	I 0.711	I

(CONTINUA)

CASO ENGASTE-APOIO (III)

TABELA 7-A - VALORES DE V/V_0 - MODU 1

I	P/P	I	D							I
			0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	
I	0.00	I	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	I
I	0.02	I	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	I
I	0.04	I	0.980	0.980	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	I
I	0.06	I	0.970	0.970	0.971	0.971	0.971	0.971	0.971	I
I	0.08	I	0.960	0.960	0.961	0.961	0.961	0.961	0.961	I
I	0.10	I	0.950	0.950	0.950	0.951	0.951	0.951	0.951	I
I	0.12	I	0.939	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	I
I	0.14	I	0.929	0.929	0.930	0.930	0.930	0.930	0.930	I
I	0.16	I	0.918	0.919	0.919	0.920	0.920	0.920	0.919	I
I	0.18	I	0.907	0.908	0.909	0.909	0.909	0.909	0.909	I
I	0.20	I	0.897	0.897	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	I
I	0.22	I	0.885	0.886	0.887	0.887	0.887	0.887	0.887	I
I	0.24	I	0.874	0.875	0.876	0.876	0.876	0.876	0.876	I
I	0.26	I	0.863	0.864	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	I
I	0.28	I	0.851	0.853	0.853	0.854	0.854	0.854	0.854	I
I	0.30	I	0.840	0.841	0.842	0.842	0.842	0.842	0.842	I
I	0.32	I	0.828	0.829	0.830	0.830	0.831	0.831	0.830	I
I	0.34	I	0.816	0.817	0.818	0.818	0.819	0.819	0.819	I
I	0.36	I	0.803	0.805	0.806	0.806	0.807	0.807	0.807	I
I	0.38	I	0.791	0.793	0.793	0.794	0.794	0.794	0.794	I
I	0.40	I	0.778	0.780	0.781	0.782	0.782	0.782	0.782	I
I	0.42	I	0.765	0.767	0.768	0.769	0.769	0.769	0.769	I
I	0.44	I	0.752	0.754	0.755	0.756	0.756	0.756	0.756	I
I	0.46	I	0.739	0.741	0.742	0.743	0.743	0.743	0.743	I
I	0.48	I	0.725	0.727	0.728	0.729	0.729	0.730	0.729	I
I	0.50	I	0.712	0.713	0.715	0.715	0.716	0.716	0.716	I

(CONTINUA)

CASO ENGASTE-APOIO (III)

TABELA 7-B - VALORES DE V/V_0 - MODO 2.

I	P/P ₀	D							I
		0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.00	I	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.02	I	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	I
I	0.04	I	0.979	0.980	0.980	0.979	0.979	0.979	I
I	0.06	I	0.969	0.969	0.969	0.969	0.969	0.969	I
I	0.08	I	0.958	0.959	0.959	0.959	0.958	0.958	I
I	0.10	I	0.947	0.948	0.948	0.948	0.948	0.948	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.12	I	0.936	0.937	0.937	0.937	0.937	0.937	I
I	0.14	I	0.925	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	I
I	0.16	I	0.914	0.915	0.915	0.915	0.915	0.915	I
I	0.18	I	0.903	0.904	0.904	0.904	0.904	0.904	I
I	0.20	I	0.892	0.893	0.893	0.893	0.892	0.892	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.22	I	0.880	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	I
I	0.24	I	0.868	0.870	0.870	0.870	0.869	0.869	I
I	0.26	I	0.856	0.858	0.858	0.858	0.858	0.857	I
I	0.28	I	0.844	0.846	0.846	0.846	0.846	0.845	I
I	0.30	I	0.832	0.834	0.834	0.834	0.834	0.833	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.32	I	0.820	0.821	0.822	0.821	0.821	0.821	I
I	0.34	I	0.807	0.809	0.809	0.809	0.809	0.808	I
I	0.36	I	0.794	0.796	0.797	0.796	0.796	0.796	I
I	0.38	I	0.781	0.783	0.784	0.784	0.783	0.783	I
I	0.40	I	0.768	0.770	0.771	0.770	0.770	0.770	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.42	I	0.754	0.757	0.757	0.757	0.757	0.757	I
I	0.44	I	0.741	0.743	0.744	0.744	0.743	0.743	I
I	0.46	I	0.727	0.729	0.730	0.730	0.730	0.729	I
I	0.48	I	0.713	0.715	0.716	0.716	0.716	0.715	I
I	0.50	I	0.698	0.701	0.702	0.701	0.701	0.701	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I

(CONTINUA)

CASO ENGASTE-LIVRE (IV)

TABELA 8-A - VALORES DE V/V_0 - MODO 1

I	P/P ₀	D							I
		0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.00	I	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.02	I	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	I
I	0.04	I	0.981	0.981	0.981	0.982	0.982	0.982	I
I	0.06	I	0.972	0.972	0.972	0.972	0.973	0.973	I
I	0.08	I	0.962	0.962	0.963	0.963	0.963	0.963	I
I	0.10	I	0.952	0.953	0.953	0.953	0.954	0.954	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.12	I	0.942	0.943	0.943	0.944	0.944	0.944	I
I	0.14	I	0.932	0.933	0.933	0.934	0.934	0.935	I
I	0.16	I	0.922	0.923	0.923	0.924	0.924	0.925	I
I	0.18	I	0.912	0.912	0.913	0.914	0.914	0.915	I
I	0.20	I	0.901	0.902	0.903	0.903	0.904	0.905	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.22	I	0.890	0.891	0.892	0.893	0.894	0.894	I
I	0.24	I	0.880	0.881	0.881	0.882	0.883	0.884	I
I	0.26	I	0.869	0.870	0.871	0.872	0.873	0.873	I
I	0.28	I	0.858	0.859	0.860	0.861	0.862	0.862	I
I	0.30	I	0.846	0.847	0.848	0.849	0.851	0.851	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.32	I	0.835	0.836	0.837	0.838	0.839	0.840	I
I	0.34	I	0.823	0.824	0.825	0.827	0.828	0.829	I
I	0.36	I	0.811	0.812	0.814	0.815	0.816	0.817	I
I	0.38	I	0.799	0.800	0.802	0.803	0.804	0.805	I
I	0.40	I	0.787	0.788	0.789	0.791	0.792	0.793	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I	0.42	I	0.774	0.775	0.777	0.778	0.780	0.781	I
I	0.44	I	0.761	0.763	0.764	0.766	0.767	0.768	I
I	0.46	I	0.748	0.750	0.751	0.753	0.754	0.755	I
I	0.48	I	0.735	0.736	0.738	0.739	0.741	0.742	I
I	0.50	I	0.721	0.723	0.724	0.726	0.727	0.729	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I

(CONTINUA)

CASO ENGASTE-LIVRE (IV)

TABELA 8-B - VALORES DE V/V_0 - MODO 2

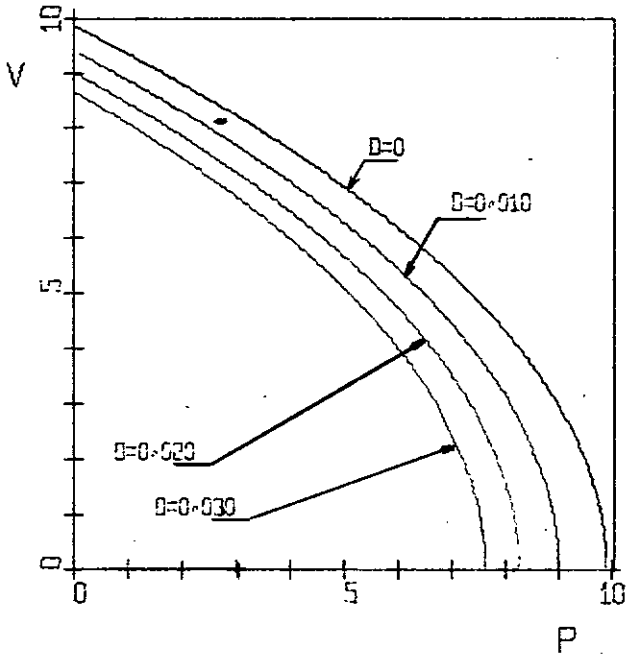
P/P ₀	D							
	0.000	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.030	
0.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
0.02	0.985	0.985	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	
0.04	0.970	0.970	0.971	0.971	0.971	0.971	0.971	
0.06	0.954	0.955	0.956	0.956	0.956	0.957	0.957	
0.08	0.939	0.940	0.940	0.941	0.941	0.942	0.942	
0.10	0.923	0.924	0.925	0.926	0.926	0.926	0.927	
0.12	0.906	0.908	0.909	0.910	0.910	0.911	0.911	
0.14	0.890	0.892	0.893	0.894	0.894	0.895	0.895	
0.16	0.873	0.875	0.876	0.877	0.878	0.879	0.879	
0.18	0.855	0.858	0.860	0.861	0.862	0.862	0.863	
0.20	0.838	0.841	0.842	0.844	0.845	0.845	0.846	
0.22	0.820	0.823	0.825	0.826	0.827	0.828	0.829	
0.24	0.802	0.805	0.807	0.809	0.810	0.811	0.812	
0.26	0.783	0.786	0.789	0.791	0.792	0.793	0.794	
0.28	0.764	0.768	0.770	0.772	0.774	0.775	0.776	
0.30	0.745	0.749	0.752	0.754	0.755	0.756	0.757	
0.32	0.725	0.729	0.732	0.734	0.736	0.737	0.738	
0.34	0.705	0.709	0.713	0.715	0.717	0.718	0.719	
0.36	0.685	0.689	0.693	0.695	0.697	0.698	0.700	
0.38	0.664	0.669	0.672	0.675	0.677	0.678	0.680	
0.40	0.643	0.648	0.652	0.655	0.657	0.659	0.660	
0.42	0.622	0.627	0.631	0.634	0.636	0.638	0.639	
0.44	0.601	0.606	0.610	0.613	0.615	0.617	0.618	
0.46	0.580	0.585	0.589	0.592	0.594	0.596	0.597	
0.48	0.558	0.564	0.568	0.571	0.573	0.575	0.576	
0.50	0.537	0.542	0.547	0.550	0.552	0.554	0.555	

(CONTINUA)

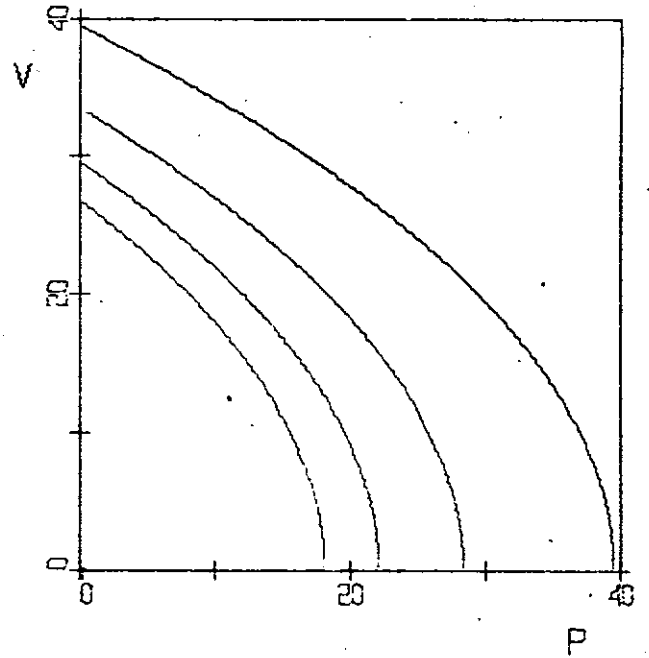
GRÁFICO 1

CASO APOIO-APOIO

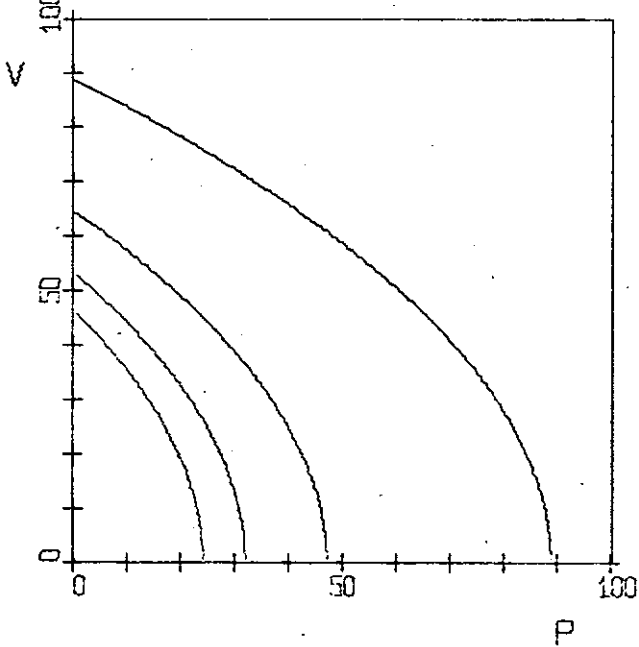
MOD0 1



MOD0 2



MOD0 3



MOD0 4

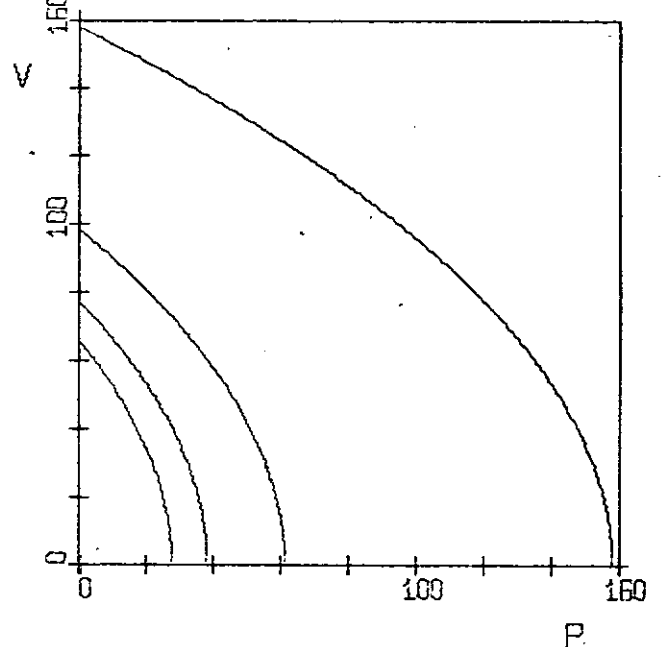
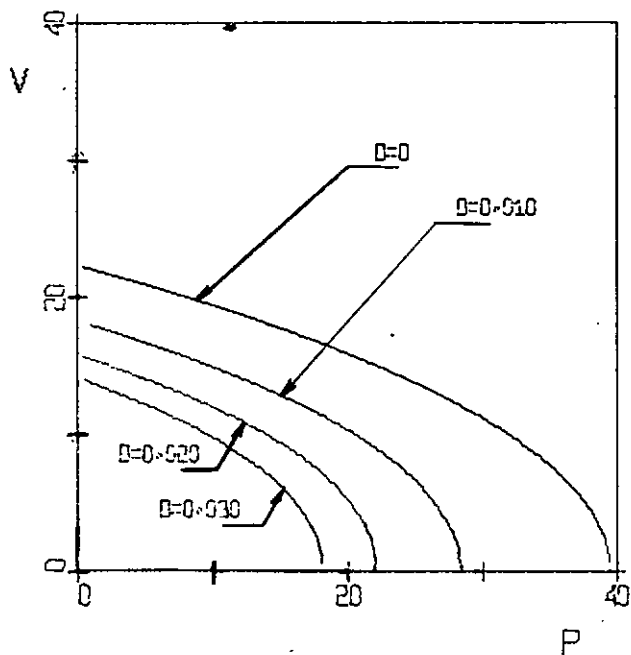


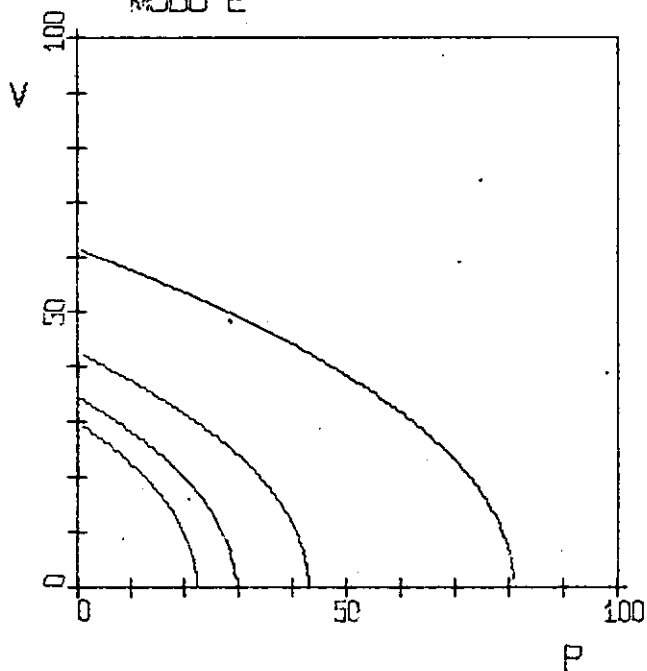
GRÁFICO 2

CASO ENGASTE-ENGASTE

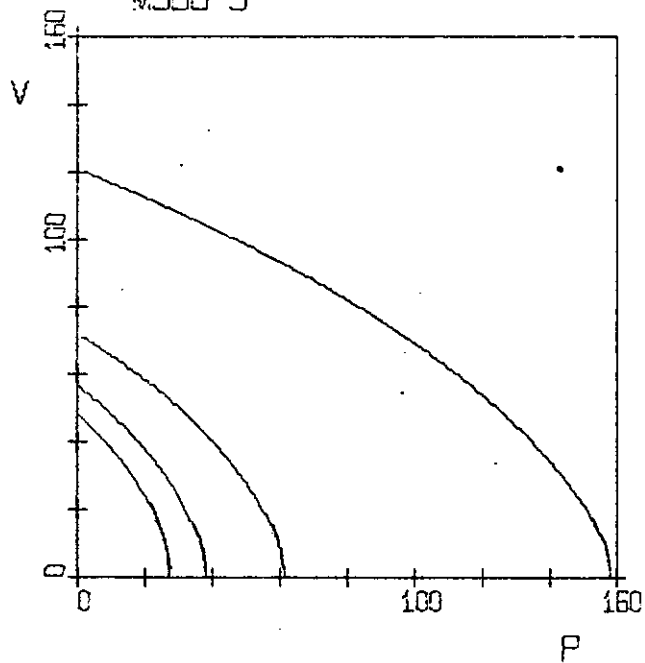
MOD0 1



MOD0 2



MOD0 3



MOD0 4

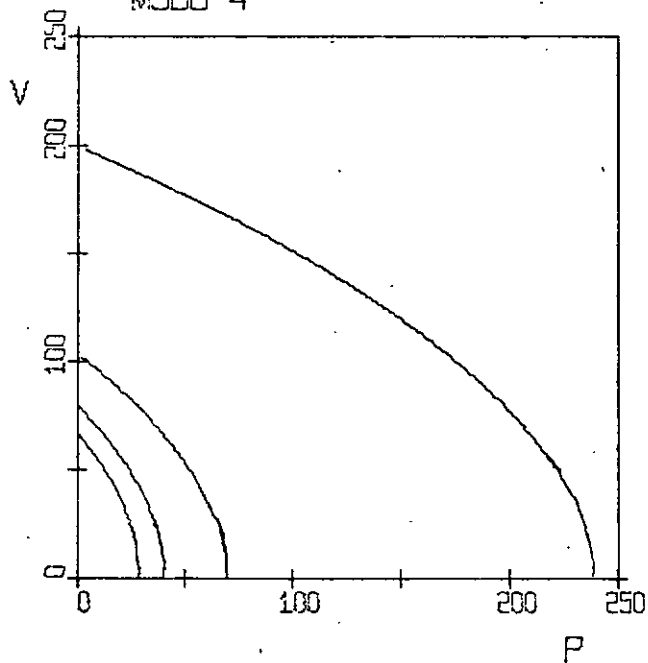
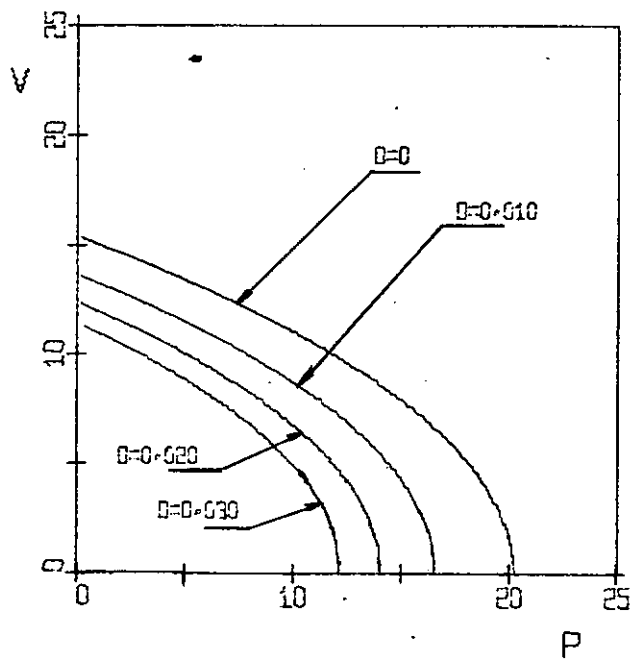


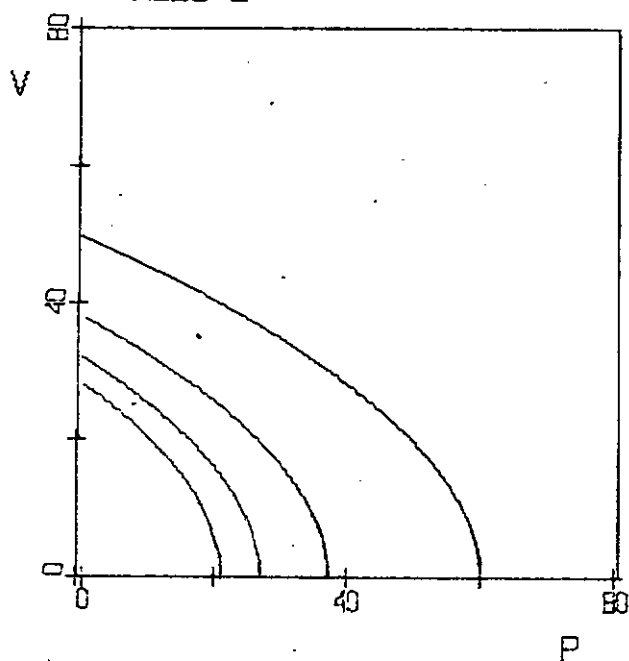
GRÁFICO 3

CASO ENGASTE-APOIO

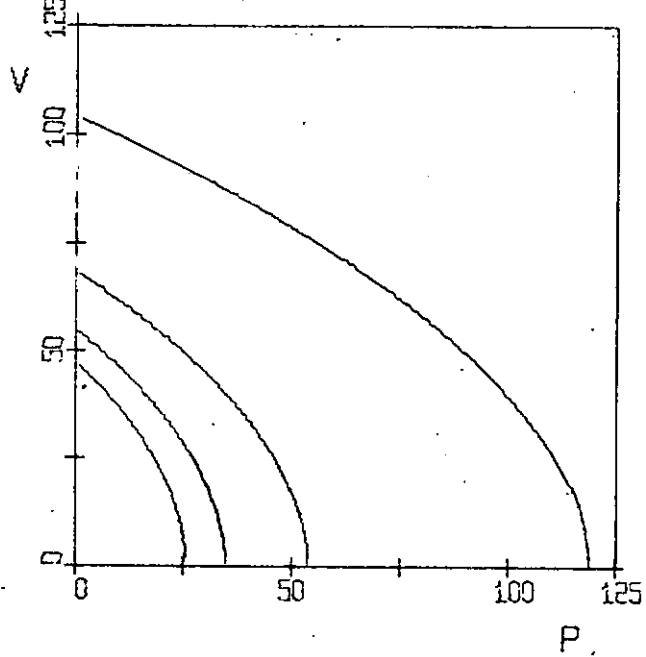
MOD0 1



MOD0 2



MOD0 3



MOD0 4

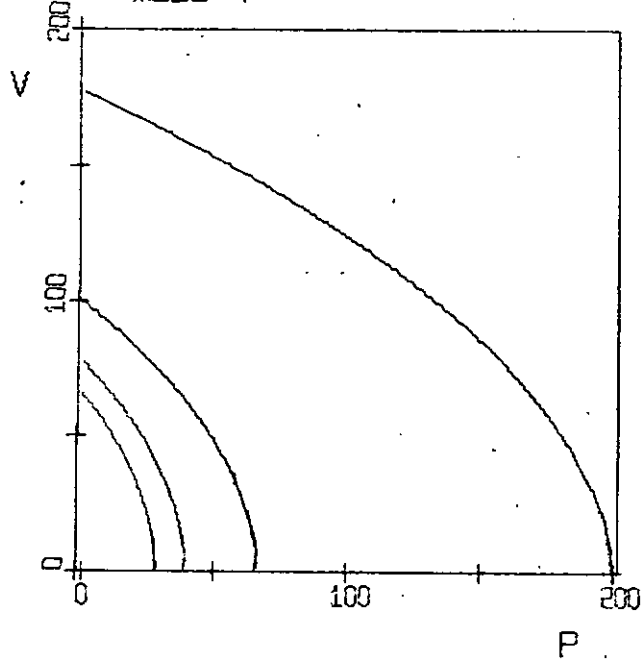
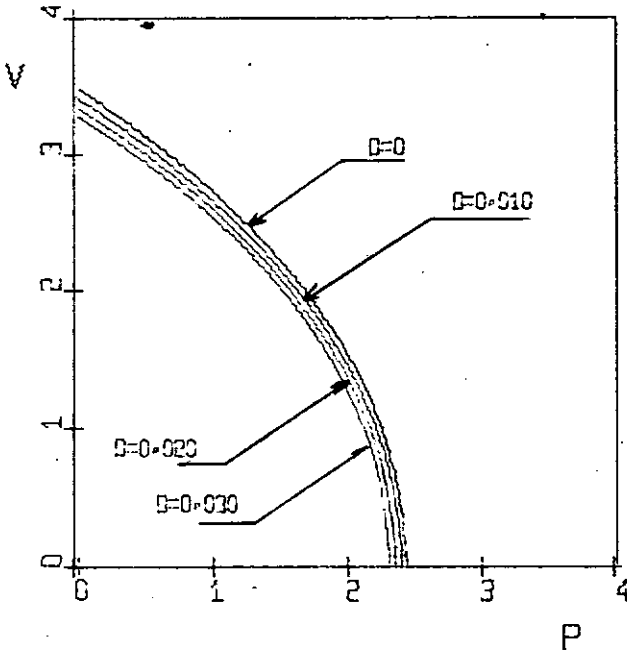


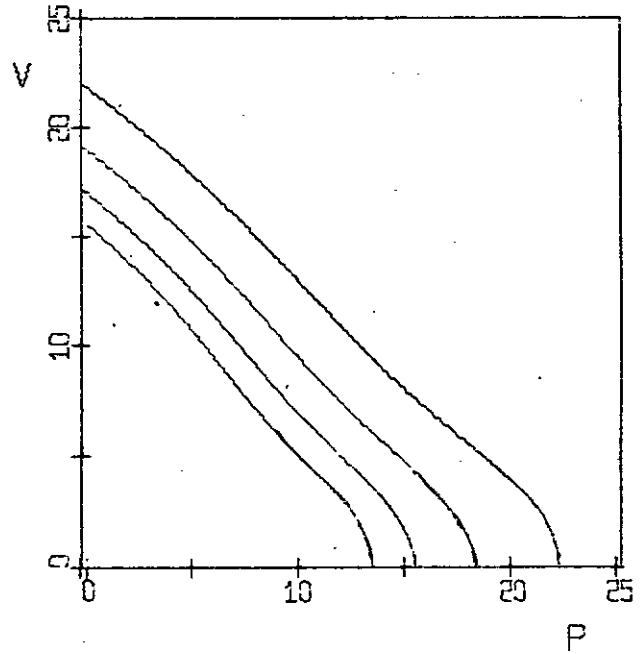
GRÁFICO 4

CASO ENGASTE-LIVRE

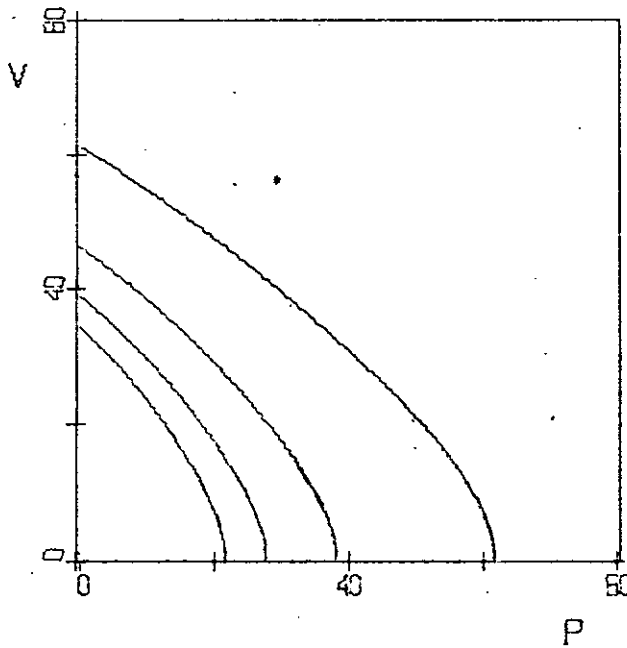
MOD0 1



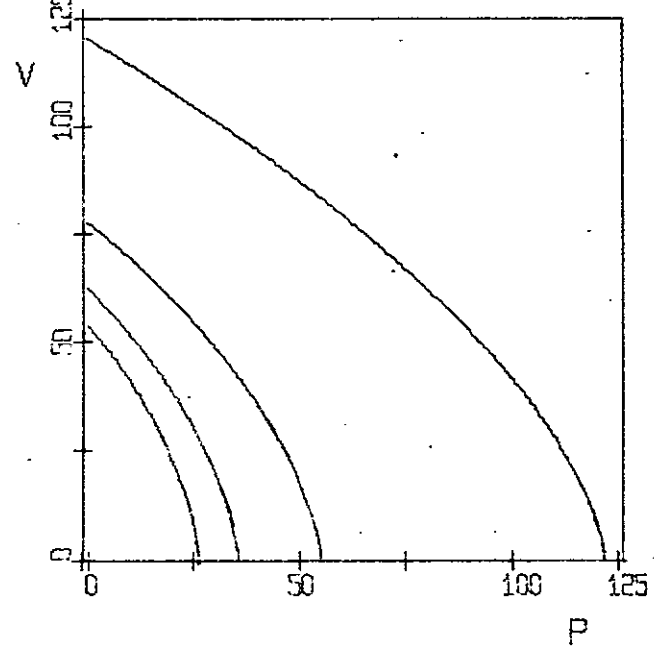
MOD0 2



MOD0 3



MOD0 4



S I M B O L O G I A

A	- ação
B	- rigidez à flexão da viga sandwich
B_f	- rigidez à flexão das faces da viga sandwich
b	- largura da viga sandwich
c	- espessura do núcleo da viga
D	- parâmetro adimensional inversamente proporcional à rigidez ao cisalhamento
E	- módulo de elasticidade do material das faces
e	- espessura das faces da viga sandwich
F	- força de compressão axial
F_{cr}	- carga crítica de instabilidade
f	- frequência natural de vibração
G	- módulo de cisalhamento do material do núcleo da viga sandwich
H	- Lagrangeana do sistema
J, K	- parâmetros homogêneos ao inverso de um comprimento, definidos pelas equações (III.15)
ℓ	- comprimento da viga
M	- momento fletor que age na seção transversal

M_o	- parcela de momento fletor devida às resultantes de tração e compressão nas faces
M_f	- parcela de momento correspondente à flexão das faces
N	- força resultante das tensões normais nas faces
n	- número inteiro e positivo que corresponde ao modo de vibração
P	- parâmetro adimensional proporcional à força axial F
P_o	- valor que assume o parâmetro P quando $f = 0$
Q	- esforço cortante na seção transversal
S	- rigidez ao cisalhamento
T	- energia cinética
t	- variável tempo
U	- energia potencial total do sistema
U_i	- energia de deformação da viga
U_e	- trabalho das forças externas
V	- parâmetro adimensional proporcional à frequência de vibração
V_o	- valor assumido pela parâmetro V quando $F = 0$
w	- deflexão da viga
w_b, w_s	- deflexões parciais definidas no texto
X, X_γ	- funções de x definidas no texto
x	- abscissa de um ponto do eixo da viga

- z - distância de um ponto da seção transversal ao eixo da viga
 z_f - distância de um ponto da seção transversal situado na face, ao eixo desta
 α, β - parâmetros homogêneos ao inverso de um comprimento, definidos no texto
 γ - distorção do elemento da viga
 γ_c - distorção do núcleo da viga
 ρ - massa por unidade de comprimento da viga
 σ_z - tensão normal em um ponto da face à distância z do eixo da viga
 $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}$ - parcelas de σ_z
 τ_z - tensão cisalhante em um ponto à distância z do eixo da viga
 τ_c - tensão cisalhante no núcleo da viga

B I B L I O G R A F I A

- 1 - Plantema, Frederick J., "Sandwich Construction"; John Wiley and Sons, New York, 1966
- 2 - Rayleigh, Lord J.W.S., "Theory of Sound"; Dover, London, 1945
- 3 - Langhaar, Henry L., "Energy Methods in Applied Mechanics"; John Wiley and Sons, New York, 1962
- 4 - Weinstock, Robert, "Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering"; McGraw-Hill, New York, 1952
- 5 - Biezeno, C.B. - Grammel, R., "Engineering Dynamics", vol. I; Blackie and Son Ltd., Glasgow, 1957
- 6 - Ziegler, Hans, "Principles of Structural Stability"; Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1968
- 7 - Nowacki, W., "Dynamics of Elastic Systems"; Chapman and Hall Ltd., London, 1963
- 8 - Glaser, Alva Roy, "The Vibration of Sandwich Beams" (Developments in Mechanics, vol. 1, Proc. 7th Midwestern Mechanics Conf., Michigan State Univ., 1961); North Holland Publi. Co., Amsterdam, 1961
- 9 - Allen, Howard G., "Analysis and Design of Structural Sandwich Panels"; Pergamon Press, Hungary, 1969
- 10 - Girkmann, Karl, "Flächentragwerke"; Springer-Verlag, Wien, 1963

- 11 - Gelfand, I.M. - Fomin, S.V., "Calculus of Variations"; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963
- 12 - Timoshenko, Stephen P. - Gere, James M., "Theory of Elastic Stability"; McGraw-Hill, 1961
- 13 - Raville, M.E. - Ueng, E.S. - Lei, M.M., "Natural Frequencies of Vibration of Fixed-Fixed Sandwich Beams"; Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 28, September 1961, New York
- 14 - Gomes, Paulo A - Bevilacqua, Luiz, "Vibrações e Instabilidade de Placas Retangulares Submetidas a Cargas de Compressão Não Uniformes", COPPE-UFRJ, 1968
- 15 - Habip, Lui M., "A Survey of Modern Developments in the Analysis of Sandwich Structures"; Applied Mechanics Surveys, Spartan Books, Washington, 1966
- 16 - Kimel, W.R. et al., "Natural Frequencies of Vibration of Simply Supported Sandwich Beams"; Proc. 4th Midwestern Conf. Sol. Mech., The Univ. of Texas, Austin, Texas, 1959